Formálne jazyky a automaty

Copyright © 2002 Ondrej Jombík

31. mája 2002

1 Zadanie

Zostrojte LBA, ktorý bude akceptovať jazyk

$$\mathrm{L} = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$$

2 Riešenie

Riešením úlohy je nasledovný automat

$$A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{begin}, F)$$

kde

$$\begin{array}{rcl} K & = & \{q_{begin}, q_{null}, q_{null\_back}, q_{start}, \\ & & q_{mark}, q_{forward_a}, q_{forward_b}, q_{determine}, \\ & & q_{check_1}, q_{check_2}, q_{rewind_1}, q_{rewind_2}, \\ & & q_{reset_1}, q_{reset_2}, q_{end}\}, \\ F & = & \{q_{end}\}, \\ \Sigma & = & \{a\}, \\ \Gamma & = & \{a, a', b, B\} \end{array} .$$

Prechodová funkcia δ vyzerá takto:

$$
\begin{array}{rcll}
(q_{begin}, a) & = & \{(q_{null}, B, 1)\} & (01)\\
(q_{null}, a) & = & \{(q_{null}, B, 1)\} & (02)\\
(q_{null}, \$) & = & \{(q_{null\_back}, \$, -1)\} & (03)\\
(q_{null\_back}, B) & = & \{(q_{null\_back}, B, -1)\} & (04)\\
(q_{null\_back}, \cent) & = & \{(q_{start}, \cent, 1)\} & (05)\\
\\
(q_{start}, B) & = & \{(q_{determine}, a', 0)\} & (11)\\
(q_{mark}, a) & = & \{(q_{forward_a}, a', 1)\} & (12)\\
(q_{forward_a}, a) & = & \{(q_{forward_a}, a, 1)\} & (13)\\
(q_{forward_a}, b) & = & \{(q_{forward_b}, b, 1)\} & (14)\\
(q_{forward_a}, \$) & = & \{(q_{determine}, \$, 0)\} & (15)\\
(q_{forward_a}, B) & = & \{(q_{determine}, b, 1)\} & (16)\\
(q_{forward_b}, b) & = & \{(q_{forward_b}, b, 1)\} & (17)\\
(q_{forward_b}, B) & = & \{(q_{determine}, b, 1)\} & (18)\\
\\
(q_{determine}, \$) & = & \{(q_{check_1}, \$, -1)\} & (21)\\
(q_{determine}, B) & = & \{(q_{rewind_1}, B, -1)\} & (22)\\
(q_{check_1}, b) & = & \{(q_{check_1}, b, -1)\} & (23)\\
(q_{check_1}, a') & = & \{(q_{check_2}, a', -1)\} & (24)\\
(q_{check_2}, a') & = & \{(q_{check_2}, a', -1)\} & (25)\\
(q_{check_2}, \cent) & = & \{(q_{end}, \cent, 0)\} & (26)\\
\\
(q_{rewind_1}, b) & = & \{(q_{rewind_1}, b, -1)\} & (31)\\
(q_{rewind_1}, a) & = & \{(q_{rewind_2}, a, -1)\} & (32)\\
(q_{rewind_1}, a') & = & \{(q_{reset_1}, a', 1)\} & (33)\\
(q_{rewind_2}, a) & = & \{(q_{rewind_2}, a, -1)\} & (34)\\
(q_{rewind_2}, a') & = & \{(q_{mark}, a', 1)\} & (35)\\
\\
(q_{reset_1}, b) & = & \{(q_{reset_1}, a', 1)\} & (41)\\
(q_{reset_1}, B) & = & \{(q_{reset_2}, B, -1)\} & (42)\\
(q_{reset_2}, a') & = & \{(q_{reset_2}, a, -1)\} & (43)\\
(q_{reset_2}, \cent) & = & \{(q_{mark}, \cent, 1)\} & (44)
\end{array}
$$

3 Popis

Vačší počet stavov a pravidiel prechodovej funkcie je z dôvodu zabezpečenia automatu proti nežiadúcemu správaniu. Nežiadúcim správaním sa myslí neakceptovanie niektorého zo slov typu a^{2^n} alebo aj akceptovanie neprípustného slova. Automat by sa dal zostrojiť aj jednoduchšie, ale pri jeho zostavovaní by sa musela zachovať zvýšená opatrnosť a taktiež dôkaz funkčnosti by bol zrejme zložitejší.

Automat pracuje tak, že si najskôr vynuluje vstupnú pásku. Potom sa snaží cyklickým duplikovaním nanášať na pásku slová s dĺžkou mocniny dva. Čiže na páske sa postupne objavujú slová (lepšie povedané prefixy) a, a^2, a^4, a^8 atď. Samotné cyklické duplikovanie prefixu na páske prebieha tak, že sa v pôvodnom slove (prefixe) označujú už skopírované časti slova. Pokiaľ sú všetky písmena slova prepísané, slovo sa znormalizuje a pokračuje sa v opatovnom kopírovaní, tentoraz už však nového slova.

Detekcia správnosti slova prebieha pri dosiahnutí konca pásky. Pokiaľ slovo obsahuje nejaké písmená, ktoré zatiaľ neboli skopírované, znamená to, že slovo nie je tvaru a^{2^n} a automat sa zasekne. Pokiaľ boli všetky písmená úspešne skopírované, znamená to, že slovo na páske je dvojnásobkom predchádzajúceho slova (prefixu). Lenže toto slovo bolo tvaru a^{2^n}. Čiže aj $a^{2^n.2}$ je tvaru a^{2^n} a teda automat slovo akceptuje.

Pravidlá (01) – (05) slúžia na úvodné vynulovanie pásky. Ďalej pravidlá (11) – (18) zapíšu a' a vykonajú posun vpred. Kontrola, prípadne akceptácia je zabezpečená pomocou pravidiel (21) – (26). Pravidlá (31) – (35) pretáčajú vzad a nakoniec pravidlá (41) – (44) normalizujú slovo (prefix).

4 Dôkaz

$\underline{L(A) \subseteq L}$:

Chceme dokázať, že všetky slová akceptované automatom A patria do jazyka L.

Keďže automat môže slovo akceptovať iba vtedy, keď sú už všetky písmená predchádzajúceho slova skopírované, akceptované budú len slová tvaru a^{2^n}.

Akceptácia slova iného tvaru nie je možná pretože by to znamenalo, že čast kopírovaného slova nebola skopírovaná. Na páske ostalo aspoň jedno písmeno a. Páska potom vyzerá takto:

$$\cent a'^* a^* b^* B^0 \$$$

Kontrolná subrutina však nedokáže slovo akceptovať pokiaľ obsahuje aspoň jedno písmeno a, čiže nesprávna akceptácia je vylúčená.

$\underline{L \subseteq L(A)}$:

Chceme dokázať, že automat A akceptuje všetky slová z jazyka L. Dôkaz vykonáme matematickou indukciou vzhľadom na počet rozhodovaní v stave $q_{determine}$.

1° Ľahko sa overí, že pri jednom rozhodovaní v stave $q_{determine}$, bude automat A akceptovať slovo tvaru $¢a\$ \in L$. Po úvodnom vyčistení pásky a následnom zapísaní písmena a', sa automat dostane do rozhodovacieho stavu pomocou (11). Následne sa cez (21) presunie do kontrolnej subrutiny pozostávajúcej zo stavov q_{check_1} a q_{check_2}, ktorá slovo akceptuje.

   Podobne jednoducho sa dá overiť akceptácia slova $¢aa\$ \in L$, ktorá zodpovedá dvom $(2 = 2^{(1-1)} + 1)$ rozhodovaniam v $q_{determine}$.

2° Majme slovo tvaru a^{2^n}, ktorému zodpovedá $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 1$ rozhodovaní v $q_{determine}$. Dokážeme, že slovu $a^{2^{(n+1)}}$ zodpovedá $\sum_{i=0}^{n} 2^i + 1$ rozhodovaní v $q_{determine}$. A naozaj. Slovo a^{2^n} treba zdvojnásobiť na páske. Každé písmeno a sa označí ako a' a jeho kópia v podobe písmena b sa prenesie na koniec. Za každé jedno kopírované písmeno nastane jedno rozhodovanie. Čiže počet rozhodovaní bude

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 1 + |a^{2^n}| = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 1 + 2^n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 1 = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 1$$

   Pri poslednom v z týchto rozhodovaní však rozhodovacím znakom pre pravidlá v $q_{determine}$ bude znak konca pásky \$, čiže automat následne slovo akceptuje.

Keďže $L(A) \subseteq L$ a zároveň $L \subseteq L(A)$, tak potom $L(A) = L$.

5 Záver

Úlohu sa mi podarilo úspešne vyriešiť a dokázať.