Formálne jazyky a automaty

Úloha 4
Sada 1

Ondrej Jombík
2i2

1 Zadanie

Zostrojte kontextovú gramatiku G pre jazyk

L=$\{ww^Rw \mid w \in \{a,b\}^+\}$

a dokážte správnosť konštrukcie, teda že platí

L = L(G).

2 Definície

<u>Definícia:</u> Kontextová gramatika je taká frázová gramatika, v ktorej pre každé pravidlo $u \Rightarrow v$ platí $|u| \leq |v|$.

<u>Definícia:</u> Frázová gramatika je štvorica

G=(N, T, P, σ),

kde N a T sú abecedy neterminálnych a terminálnych symbolov (N $\cap$ T $= \emptyset$), $\sigma \in$ N je počiatočný neterminál a P $\subseteq$ (N $\cup$ T $)^*$N(N $\cup$ T$)^* \times$ (N $\cup$ T$)^*$ je konečná množina pravidiel.

3 Úvahy

1. ww^R vieme vygenerovať jednoducho
2. pre ww^Rw označíme koniec slova
3. vytvoríme neterminály
4. generujeme špeciálne ww^R
5. posun neterminálov na koniec
6. konverzia na terminály
7. zámena koncového znaku
8. ww^Rw

4 Riešenie

G=(N, T, P, σ)

N=$\{X_1, X_2, T_1, T_2, A, B, \sigma\}$
T=$\{a, b\}$

$$
P = \left\{ \begin{array}{lcrcl}
p_{10} & = & \sigma & \rightarrow & X_1T_1 \mid X_2T_2 \\
\\
p_{20} & = & X_1 & \rightarrow & aa \mid aX_1Aa \mid bX_1Bb \\
p_{21} & = & X_2 & \rightarrow & bb \mid aX_2Aa \mid bX_2Bb \\
\\
p_{30} & = & Aa & \rightarrow & aA \\
p_{31} & = & Ab & \rightarrow & bA \\
p_{32} & = & Ba & \rightarrow & aB \\
p_{33} & = & Bb & \rightarrow & bB \\
\\
p_{40} & = & AT_1 & \rightarrow & aT_1 \\
p_{41} & = & AT_2 & \rightarrow & aT_2 \\
p_{42} & = & BT_1 & \rightarrow & bT_1 \\
p_{43} & = & BT_2 & \rightarrow & bT_2 \\
\\
p_{50} & = & T_1 & \rightarrow & a \\
p_{51} & = & T_2 & \rightarrow & b
\end{array} \right\}
$$

5 Dôkaz (1.časť)

L(G) $\subseteq$ L: odvodzovanim podľa P

1. p_{10}, p_{11}: počiatočný krok, zapíšeme T_i
2. p_{20}, p_{21}: zápis 2 terminálov a 1 neterminálu
3. $p_{30}, ..., p_{33}$: presun neterminálov na koniec slova
4. $p_{40}, ..., p_{43}$: transformacia krajných neterminálov na terminály; možnosť návratu na (3)
5. p_{50}, p_{51}: finálna konverzia
6. vysledné slovo v tvare ww^Rw

6 Dôkaz (2.časť)

L $\subseteq$ L(G): MI vzhľadom na dĺžku slova

1° $\sigma \Rightarrow_{(p_{10}|p_{11})} X_1T_1 \Rightarrow_{(p_{20}|p_{21})} xxx = u$

2° $\underline{\ u = ww^Rw\ }$
$\sigma \Rightarrow_{p_{10}} X_iT_i \Rightarrow^{n-1}_{(p_{20}|p_{21})} vX_iZT_i$
$\Rightarrow^{*}_{(p_{30}|p_{31}|p_{32}|p_{33})} vX_iv^RV^RT_i$
$\Rightarrow^{n-1}_{(p_{40}|p_{41}|p_{42}|p_{43})} vX_iv^RvT_i$
$\Rightarrow^{*}_{(p_{20}|p_{21}|p_{50}|p_{51})} ww^Rw = u$

$\underline{\ u' = wxxw^Rwx\ }$
$\sigma \Rightarrow_{p_{10}} X_iT_i \Rightarrow^{n-1}_{(p_{20}|p_{21})} vX_iZT_i$
$\Rightarrow_{(p_{20}|p_{21})} vxX_iXxZT_i$
$\Rightarrow^{*}_{(p_{30}|p_{31}|p_{32}|p_{33})} vxX_ixv^RXV^RT_i$
$\Rightarrow^{n-1}_{(p_{40}|p_{41}|p_{42}|p_{43})} vxX_ixv^RvxT_i$
$\Rightarrow^{*}_{(p_{20}|p_{21}|p_{50}|p_{51})} wxxw^Rwx = u'$

7 Záver

L(G)$\subseteq$L $\wedge$ L$\subseteq$L(G) $\Rightarrow$ L(G)=L

Úlohu sa mi podarilo úspešne vyriešiť a dokázať.