# Formálne jazyky a automaty

Copyright © 2001 Ondrej Jombík

March 10, 2002

## 1 Zadanie

Pre daný LBA A zostrojte LBA A' taký, že

$$L(A') = \{w^R \mid w \in L(A)\}.$$

Matematickou indukciou dokážte správnosť konštrukcie.

## 2 Riešenie

Nech

$$A = (\Sigma, \Gamma, K, F, \delta, q_0).$$

Potom

$$A' = (\Sigma, \Gamma, K', F, \delta', q_0'),$$

pričom platí, že

$$\delta' : \left\{ \begin{array}{rcll} \delta(q_0', a) & = & \{(q_0', a, 1)\}, a \in \Sigma & (1) \\ \delta(q_0', \$) & = & \{(q_0, \$, -1)\} & (2) \\ & & & \\ (q', a', p') \in \delta(q, a) & \Rightarrow & (q', a', -p) \in \delta'(q, a), a \in \Gamma - \{c, \$\} & (3) \\ (q', \$, p) \in \delta(q, \$) & \Rightarrow & (q', c, -p) \in \delta'(q, c) & \\ (q', c, p) \in \delta(q, c) & \Rightarrow & (q', \$, -p) \in \delta'(q, \$) & \end{array} \right\}$$

Základná myšlienka spočíva v začiatočnom presune hlavy na koniec vstupnej pásky. Nasledovný postup bude podľa $\delta'$, teda podľa pôvodnej $\delta$-funkcie, ale s posunom hlavy opačným smerom, ako bol smer pôvodného automatu.

Je ešte nutné ošetriť správanie automatu na začiatočnom znaku $c$ a koncovom znaku \$. V týchto prípadoch sa bude nový automat správať akoby prečítal \$ namiesto $c$, resp. $c$ namiesto \$.

## 3 Dôkaz

$\{w^R \mid w \in L(A)\} \subseteq L(A')$:

Ak máme nejaké slovo $w \in L(A)$ a k nemu prislúchajúci akceptačný výpočet v automate $A$, potom automat $A'$ by mal akceptovať slovo $w^R$.

A naozaj. Automat $A'$ skutočne akceptuje $w^R$. Akceptačný výpočet vychádza z pôvodného výpočtu. Najskôr sa musíme dostať na koniec slova. Na to sa použije $|w| - 1$ krát (1) a hneď nato jeden krát (2).

Ďalej pokračujeme pomocou (3), čo vlastne zodpovedá pôvodnému výpočtu, ale s upravenými pravidlami.

Z konštrukcie $\delta$-funkcie vyplýva, že ide skutočne o akceptačný výpočet, pretože automat, odvtedy ako zmenil prvýkrát stav na $q_0'$, sa správa ako pôvodný automat spracovávajúci obrátené slovo.

$\underline{L(A') \subseteq \{w^R \mid w \in L(A)\}:}$

Musíme ukázať, že automat $A'$ akceptuje len slová z množiny $\{w^R \mid w \in L(A)\}$.

Dôkaz vykonáme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku krokov výpočtu. Nech má teda slovo $w$ dĺžku $n$. Počnúc dĺžkou výpočtu $n+1$ ukážeme, že ku každej konfigurácii do ktorej sa počas akceptačného výpočtu slova $w^R$ automat $A'$ dostane, existuje počas akceptačného výpočtu slova $w$ nejaká konfigurácia automatu $A$.

1° Po $n+1$ krokoch, ktoré samozrejme tvorilo $n$ použití pravidla (1) nasledovaného hneď (2), sa automat $A'$ nachádza v konfigurácii $(q_0', cw^R\$, n)$, ktorá zodpovedá konfigurácii automatu A $(q_0', cw\$, 1)$, teda konfigurácii na začiatku výpočtu.

2° Nech má konfigurácia automatu $A'$ po $n+k$ krokoch stále požadovaný tvar. Ukážeme, že aj po $n+k+1$ krokoch bude mať konfigurácia automatu $A'$ požadovaný tvar, tzn. že bez závislosti na tom, aké pravidlo použijeme, ostane výpočet stále ekvivalentný s akceptačným výpočtom pre slovo $w$ v pôvodnom automate $A$.

   Nech sa teda automat $A'$ nachádza v konfigurácii $(q, cw^R\$, p)$, ktorá je ekvivalentná s konfiguráciou $(q, cw\$, n-p+1)$ v pôvodnom automate $A$. Keďže už prebehlo viac ako $n+1$ krokov výpočtu, nemôže automat použiť ani (1), ani (2), pretože sa už nedá dosiahnuť stav $q_0'$.

   Preto musí použiť nejaké iné pravidlo okrem (1) a (2), čiže niečo z (3). Pravidlá (3) však ako vieme, vznikli prepisom pôvodnej $\delta$-funkcie. Teda ku každému z týchto pravidiel existuje práve jedno ekvivalentné pravidlo z pravidiel, ktoré by mohol použiť pôvodný automat $A$.

   Keďže množina akceptačných stavov je u oboch automatov rovnaká, výpočty sa dostanú do akceptačných stavov na ekvivalentný počet krokov. Teda ak automat $A$ sa dostal do akceptačného stavu na $m$ krokov, automat $A'$ sa dostane do akceptačného stavu na $m+n+1$ krokov.

# 4 Záver

Úlohu sa mi podarilo úspešne vyriešiť a dokázať.