Formálne jazyky a automaty

March 10, 2002

1 Zadanie

Zostrojte kontextovú gramatiku G pre jazyk

$$L = \{ww^Rw \mid w \in \{a,b\}^+\}$$

a dokážte správnosť konštrukcie, teda že platí L=L(G).

2 Riešenie

Uvažujme kontextovú gramatiku G pre daný jazyk, takú že

$$G=(N,\ T,\ P,\ \sigma),$$

kde N=$\{X_1, X_2, T_1, T_2, A, B, \sigma\}$, T=$\{a, b\}$, P=$\{p_{10}, p_{20}, p_{21}, p_{30}, p_{31}, p_{32}, p_{33}, p_{40}, p_{41}, p_{42}, p_{43}, p_{50}, p_{51}\}$ pričom platí, že

$$\begin{array}{rcrcl}
p_{10} & = & \sigma & \rightarrow & X_1T_1 \mid X_2T_2 \\
\\
p_{20} & = & X_1 & \rightarrow & aa \mid aX_1Aa \mid bX_1Bb \\
p_{21} & = & X_2 & \rightarrow & bb \mid aX_2Aa \mid bX_2Bb \\
\\
p_{30} & = & Aa & \rightarrow & aA \\
p_{31} & = & Ab & \rightarrow & bA \\
p_{32} & = & Ba & \rightarrow & aB \\
p_{33} & = & Bb & \rightarrow & bB \\
\\
p_{40} & = & AT_1 & \rightarrow & aT_1 \\
p_{41} & = & AT_2 & \rightarrow & aT_2 \\
p_{42} & = & BT_1 & \rightarrow & bT_1 \\
p_{43} & = & BT_2 & \rightarrow & bT_2 \\
\\
p_{50} & = & T_1 & \rightarrow & a \\
p_{51} & = & T_2 & \rightarrow & b
\end{array}$$

3 Dôkaz

L(G) $\subseteq$ L:

Chceme dokázat, že všetky slová získané gramatikou G patria do jazyka L. Uvažujme ako vyzerá slovo vygenerované gramatikou G a skúmajme príslušné pravidlá.

Na začiatku máme slovo σ a po aplikovaní pravidiel p_{10}, p_{20}, p_{21} dostávame slovo v tvare wxT_i, kde $i = \{1, 2\}$ a podslovo x po vypustení neterminálov A, B je vlastne w^R. Ak teda ignorujeme neterminálové pismená A a B, máme slovo v tvare ww^RT_i $(i = \{1, 2\})$.

Pravidlá $p_{30}, p_{31}, p_{32}, p_{33}$ majú za úlohu presúvať neterminály A a B na koniec slova. Toto sa využíva v spolupráci s ďalšími pravidlami p_i, kde $i >= 40$.

Ďalej pravidlá $p_{40}, p_{41}, p_{42}, p_{43}$ transformujú najkrajnejší neterminál A, resp. B na terminál a, resp. b, pričom sa naďalej využívajú predchádzajúce pravidlá na posúvanie neterminálov A a B smerom na koniec slova.

Ako úplne na záver sa použijú pravidlá p_{50}, p_{51} na finálnu konverziu koncového neterminálu T_1, resp. T_2 na terminál a, resp. b, po čom konečne dostávame slovo tvaru ww^Rw.

A tým je inklúzia L(G)⊆L dokázaná.

L ⊆ L(G):

Chceme dokázať, že všetky slová z jazyka L sa dajú získať gramatikou G. Dôkaz vykonáme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku slova u, kde $|u| = n$.

Predpokladáme, že ak $u \in L$ vieme generovať gramatikou G, tak vieme generovať aj slovo $u' \in L$ ak platí $|u'| = |u| + 3$.

1° Nech $n = 3$. Odvodenie slova u potom bude

$$\sigma \Rightarrow_{p_{10}} X_1T_1 \Rightarrow_{p_{20}} aaa = u$$

resp.

$$\sigma \Rightarrow_{p_{10}} X_2T_2 \Rightarrow_{p_{21}} bbb = u$$

2° Musíme dokázať, že ak tvrdenie platí pre n, tak platí aj pre $n + 3$. Majme teda slovo

$$u = ww^Rw, \text{ kde } w \in \{a, b\}^+,$$

ktorého tvar odvodenia je

$$\begin{gathered}\sigma \Rightarrow_{p_{10}} X_iT_i \Rightarrow^{n-1}_{(p_{20}|p_{21})} vX_iZT_i \Rightarrow^*_{(p_{30}|p_{31}|p_{32}|p_{33})} vX_iv^RV^RT_i \Rightarrow^{n-1}_{(p_{40}|p_{41}|p_{42}|p_{43})} \\ vX_iv^RvT_i \Rightarrow^*_{(p_{20}|p_{21}|p_{50}|p_{51})} ww^Rw = u\end{gathered}$$

kde $i \in \{1, 2\}$, $Z \in \{A, B, a, b\}$, pričom platí $\#_av = \#_aZ = \#_AZ$, $\#_bv = \#_bZ = \#_BZ$. Teda $|Z| = 2|v|$. Ďalej platí, že V je rovnaké slovo ako v, akurát, že na príslušných miestach obsahuje namiesto terminálov neterminály, tj. namiesto a obsahuje A a namiesto b obsahuje B.

Dokážme teraz, že vieme vygenerovať aj slovo

$$u' = wxxw^Rwx, \text{ kde } w \in \{a, b\}^+ \text{ a } x \in \{a, b\}.$$

Jeho tvar odvodenia teda bude

$$\begin{gathered}\sigma \Rightarrow_{p_{10}} X_iT_i \Rightarrow^{n-1}_{(p_{20}|p_{21})} vX_iZT_i \Rightarrow_{(p_{20}|p_{21})} vxX_iXxZT_i \Rightarrow^*_{(p_{30}|p_{31}|p_{32}|p_{33})} \\ vxX_ixv^RXV^RT_i \Rightarrow^{n-1}_{(p_{40}|p_{41}|p_{42}|p_{43})} vxX_ixv^RvxT_i \Rightarrow^*_{(p_{20}|p_{21}|p_{50}|p_{51})} wxxw^Rwx = u'.\end{gathered}$$

Teda vieme gramtikou G generovať každé slovo z jazyka L, čím sme inklúziu L⊆L(G) dokázali.

Keďže L(G)⊆L a zároveň L⊆L(G), tak potom L(G)=L.

4 Záver

Úlohu sa mi podarilo úspešne vyriešiť a dokázať.