Formálne jazyky a automaty

March 10, 2002

1 Zadanie

Zostrojte kontextovú gramatiku G pre jazyk

$$L = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^* \text{ také, že } \#_a w = \#_b w = \#_c w\}$$

a dokážte správnosť konštrukcie, teda že platí L=L(G).

2 Riešenie

Uvažujme kontextovú gramatiku G pre daný jazyk, takú že

$$G = (N, T, P, \sigma),$$

kde N=$\{A,B,C,\sigma\}$, T=$\{a,b,c\}$, P=$\{p_{10}, p_{20}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}, p_{25}, p_{30}, p_{31}, p_{32}\}$ pričom platí, že

$$\begin{array}{lcrcl}
p_{10} & = & \sigma & \rightarrow & ABC\sigma \mid \epsilon \\
p_{20} & = & AB & \rightarrow & BA \\
p_{21} & = & BA & \rightarrow & AB \\
p_{22} & = & BC & \rightarrow & CB \\
p_{23} & = & CB & \rightarrow & BC \\
p_{24} & = & AC & \rightarrow & CA \\
p_{25} & = & CA & \rightarrow & AC \\
p_{30} & = & A & \rightarrow & a \\
p_{31} & = & B & \rightarrow & b \\
p_{32} & = & C & \rightarrow & c
\end{array}$$

3 Dôkaz

L(G) $\subseteq$ L:

Uvažujme ako vyzerá slovo vygenerované gramatikou G. Na začiatku máme slovo σ, ktoré našim podminekam evidentne vyhovuje. Po aplikovaní pravidla p_{10} sa síce zmení počet neterminálov, ale podmienka ostáva aj naďalej splnená. Toto môžeme zovšeobecniť na n použití pravidla p_{10}.

Pravidlá $p_{20}, ..., p_{25}$ nemenia ani počet neterminálov, ani počet terminálov, takž po ich aplikovaní ostane takisto podmienka jazyka L splnená.

A nakoniec pravidlá p_{30}, p_{31}, p_{32}, ktoré zamieňajú príslušné neterminály za terminály.

Všeobecný tvar odvodenia teda je

$$\sigma \Rightarrow^*_{p_{10}} (ABC)^n \epsilon \Rightarrow_{p_{10}} (ABC)^n \Rightarrow^*_{(p_{20}|p_{21}|p_{22}|p_{23}|p_{24}|p_{25})} X \Rightarrow^*_{(p_{30}|p_{31}|p_{32})} x,$$

kde $n \in \{0, 1, 2, ...\}$, X je buď ϵ, alebo ľubovoľná permutácia slova $(ABC)^i$ a x je tiez buď ϵ, alebo ľubovoľná permutácia slova $(abc)^i$.

A tým je inklúzia L(G)⊆L dokázaná.

L $\subseteq$ L(G):

Dôkaz vykonáme matematickou indukciou vzhľadom na počet jedného z terminálov v slove w. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme o terminálovom písmene a.

1° Nech $n = 1$, čize $\#_a w = 1$ a teda aj $\#_b w = \#_c w = 1$. Potom taktiez $|w| = 3$. Teda odvodenie je

$$\sigma \Rightarrow_{p_{10}} ABC \Rightarrow_{p_{20}} BAC \Rightarrow_{p_{22}} BCA \Rightarrow_{p_{24}} CBA \Rightarrow_{p_{21}} CAB \Rightarrow_{p_{23}} ACB,$$

pričom v každom tvare odvodenia (okrem prvého) sme mohli aplikovať pravidlá p_{30}, p_{31}, p_{32} a tým dostať požadovaný tvar obsahujúci len terminálové písmená.

2° Musíme dokázať, že ak tvrdenie platí pre i, tak platí aj pre $i + 1$. Majme teda slovo

$$w = uvxy, \text{ kde } u, v, x, y \in \{a, b, c\}^*,$$

ktoré je generované gramatikou G, čiže platí, že $\#_a w = \#_b w = \#_c w$. Jeho tvar odvodenia je potom

$$\sigma \Rightarrow^*_{p_{10}} (ABC)^n \Rightarrow^* UVXY \Rightarrow^*_{(p_{30}|p_{31}|p_{32})} uvxy = w,$$

kde U, V, X, Y obsahujú neterminály A, B, C tak, aby po použití pravidiel p_{30}, p_{31}, p_{32} vzniklo slovo $vxyz$. Dokážme teraz, že vieme vygenerovať aj slovo

$$w' = ut_1vt_2xt_3y, \text{ kde } u, v, x, y \in \{a, b, c\}^*, \ t_1, t_2, t_3 \in \{a, b, c\}$$

pre ktoré zaroveň platí, že slovo $t_1t_2t_3$ je ľubovoľnou permutáciou slova abc. Bez ujmy na všeobecnosti môzeme predpokladať, že $t_1t_2t_3 = abc$, pretože ostatné prípady pre iné možnosti slova $t_1t_2t_3$ sa dokazujú obdobne. Takže odvodenie slova w' bude na základe slova w, teda

$$\sigma \Rightarrow^*_{p_{10}} (ABC)^n ABC \Rightarrow^* UVXYABC \Rightarrow^* UAVBXCY \Rightarrow^*_{(p_{30}|p_{31}|p_{32})} uavbxcy = w'.$$

Teda vieme gramtikou G generovať každé slovo z jazyka L, čím sme inklúziu L⊆L(G) dokázali.

Kedže L(G)⊆L a zároveň L⊆L(G), tak potom L(G)=L.

4 Záver

Úlohu sa mi podarilo úspešne vyriešiť a dokázať.